

La Conjetura de Hirsch

Francisco Santos

<http://personales.unican.es/santosf>

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria, Spain

Coloquio RSME 2011, Barcelona — 19 de Octubre de 2011

Poliedros y politopos

Definición

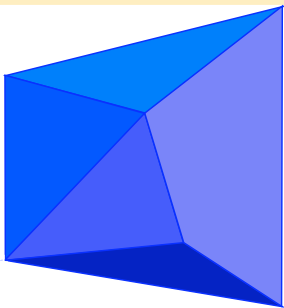
Un **poliedro** (convexo) P es la intersección de una familia finita de semiespacios afines de \mathbb{R}^d .

La **dimensión** de P es la dimensión de su cierre afín.

Poliedros y politopos

Definición

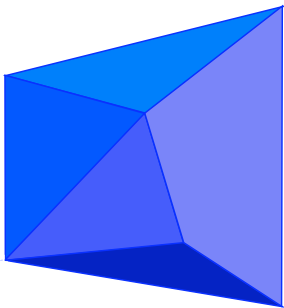
Un **politopo** (convexo) P es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos de \mathbb{R}^d .



La **dimensión** de P es la dimensión de su cierre afín.

Poliedros y politopos

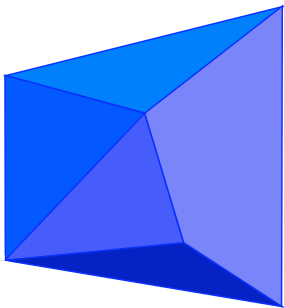
Politopo = poliedro acotado.



La **dimensión** de P es la dimensión de su cierre afín.

Poliedros y politopos

Politopo = poliedro acotado.



La **dimensión** de P es la dimensión de su cierre afín.

Caras de P

Sea P un politopo (o poliedro) y sea

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d \leq a_0\}$$

un semiespacio afín.

Si $P \subset H$, decimos que $\partial H \cap P$ es una **cara** de P .

Caras de P

Sea P un politopo (o poliedro) y sea

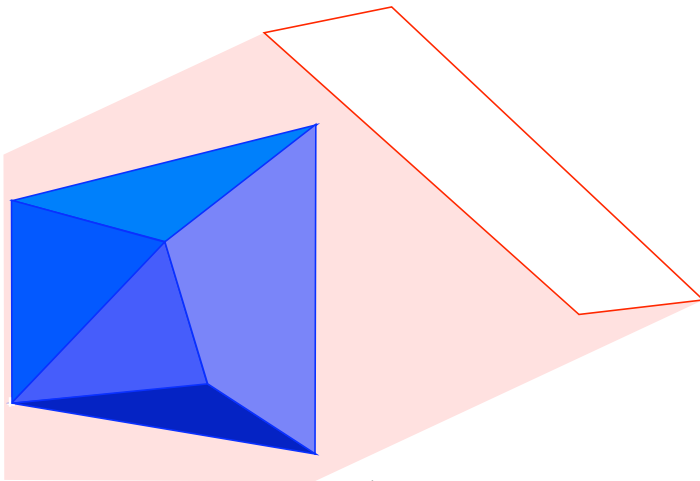
$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d \leq a_0\}$$

un semiespacio afín.

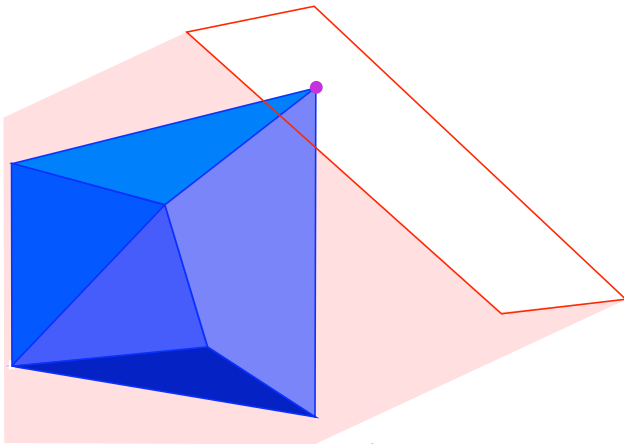
Si $P \subset H$, decimos que $\partial H \cap P$ es una **cara** de P .

Caras de P

La “cara vacía” de P .

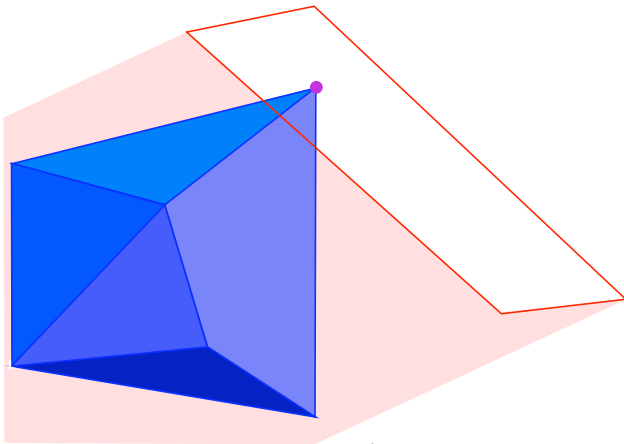


Caras de P



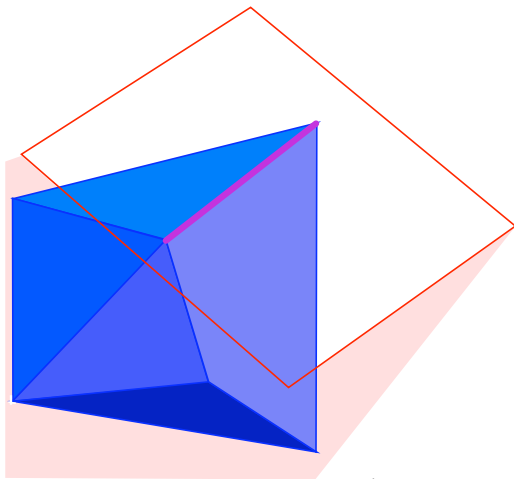
Caras de P

Las caras de dimensión 0 se llaman **vértices**.



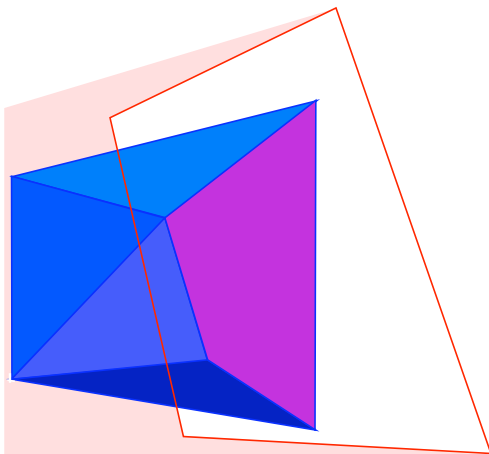
Caras de P

Las caras de dimensión 1 se llaman **aristas**.



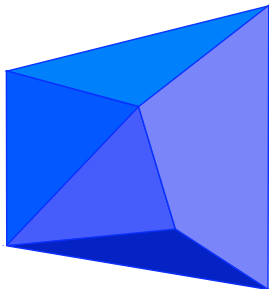
Caras de P

Las de dimensión $d - 1$ (codimensión 1) se llaman **facetas**.



El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de P forman un grafo (finito, no dirigido).

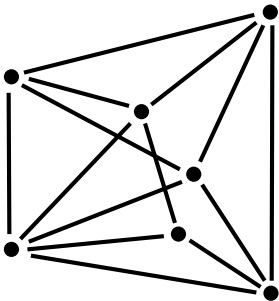


La distancia $d(u, v)$ entre dos vértices u y v es la longitud (número de aristas) del camino más corto de u a v .

Por ejemplo, $d(u, v) = 2$.

El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de P forman un grafo (finito, no dirigido).

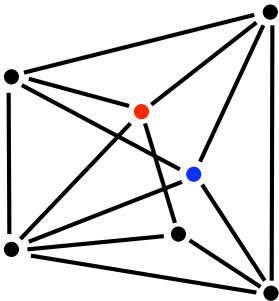


La **distancia** $d(u, v)$ entre dos vértices u y v es la longitud (número de aristas) del camino más corto de u a v .

Por ejemplo, $d(u, v) = 2$.

El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de P forman un grafo (finito, no dirigido).

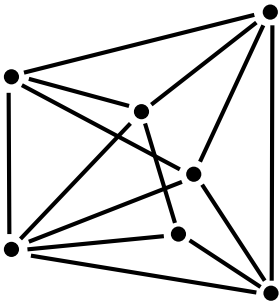


La **distancia** $d(u, v)$ entre dos vértices u y v es la longitud (número de aristas) del camino más corto de u a v .

Por ejemplo, $d(u, v) = 2$.

El grafo de un politopo

Los vértices y aristas de P forman un grafo (finito, no dirigido).



El **diámetro** de $G(P)$ (o de P) es la máxima distancia entre sus vértices:

$$\delta(P) := \max\{d(u, v) : u, v \in V\}.$$

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y tres años después...

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y tres años después...

Teorema (S. 2010+)

Hay un politopo de dimensión 43 con 86 facetas y diámetro ≥ 44 .

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y cuatro años después...

Teorema (Matschke-S.-Weibel 2011+)

Hay un politopo de dimensión 20 con 40 facetas y diámetro 41.

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y cuatro años después...

Teorema (Matschke-S.-Weibel 2011+)

Hay un politopo de dimensión 20 con 40 facetas y diámetro 41.

Corolario

Hay una familia infinita de politopos con diámetro $\sim (1 + \epsilon)n$, incluso en dimensión fija (mejor valor hasta ahora: $\epsilon = 1/20$).

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y cuatro años después...

Teorema (Matschke-S.-Weibel 2011+)

Hay un politopo de dimensión 20 con 40 facetas y diámetro 41.

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y cuatro años después...

Teorema (Matschke-S.-Weibel 2011+)

Hay un politopo de dimensión 20 con 40 facetas y diámetro 41.

A día de hoy, no conocemos ninguna cota superior polinómica para $\delta(P)$, en términos de n y d (“[Conjetura de Hirsch Polinómica](#)”)

Conjetura de Hirsch

Denotemos por $\delta(P)$ el diámetro del grafo de un politopo P .

Conjetura: Warren M. Hirsch (1957)

Para todo politopo P con n facetas y dimensión d , se tiene que

$$\delta(P) \leq n - d.$$

Cincuenta y cuatro años después...

Una cota **casi**-polinómica, y una cota lineal en dimensión fija

Teorema [Kalai-Kleitman 1992]

Para todo d -politopo con n facetas:

$$\delta(P) \leq n^{\log_2 d + 2}.$$

Teorema [Barnette 1967, Larman 1970]

Para todo d -politopo con n facetas:

$$\delta(P) \leq n2^{d-3}.$$

Una cota **casi**-polinómica, y una cota lineal en dimensión fija

Teorema [Kalai-Kleitman 1992]

Para todo d -politopo con n facetas:

$$\delta(P) \leq n^{\log_2 d + 2}.$$

Teorema [Barnette 1967, Larman 1970]

Para todo d -politopo con n facetas:

$$\delta(P) \leq n2^{d-3}.$$

Una cota **casi**-polinómica, y una cota lineal en dimensión fija

Teorema [Kalai-Kleitman 1992]

Para todo d -politopo con n facetas:

$$\delta(P) \leq n^{\log_2 d + 2}.$$

Teorema [Barnette 1967, Larman 1970]

Para todo d -politopo con n facetas:

$$\delta(P) \leq n2^{d-3}.$$

Motivación: programación lineal

Un **programa lineal** es el problema de maximizar (o minimizar) una función lineal en una región definida por desigualdades lineales. Es decir: encontrar $\max\{c \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, Mx \leq b\}$ para unos $c \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$ dados.

Motivación: programación lineal

Un **programa lineal** es el problema de maximizar (o minimizar) una función lineal en una región definida por desigualdades lineales. Es decir: encontrar $\max\{c \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, Mx \leq b\}$ para unos $c \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$ dados.

Motivación: programación lineal

Un **programa lineal** es el problema de maximizar (o minimizar) una función lineal en una región definida por desigualdades lineales. Es decir: encontrar $\max\{c \cdot x : x \in \mathbb{R}^d, Mx \leq b\}$ para unos $c \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $M \in \mathbb{R}^{d \times n}$ dados.

*“If one would take statistics about which **mathematical problem is using up most of the computer time in the world**, then (not including database handling problems like sorting and searching) the answer would probably be linear programming.”*

(László Lovász, 1980)

Conexión con la Conjetura de Hirsch

- El espacio factible $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Mx \leq b\}$ de un programa lineal con n ecuaciones en d variables es un poliedro P con (a lo más) n facetas y d dimensiones.
- La solución óptima (si existe) se alcanza siempre en algún vértice.
- El método del símplex [Dantzig 1947] resuelve el problema comenzando en un vértice cualquiera y moviéndose a través del grafo del poliedro, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con la complejidad del caso peor del método del símplex.

Conexión con la Conjetura de Hirsch

- El espacio factible $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Mx \leq b\}$ de un programa lineal con n ecuaciones en d variables es un poliedro P con (a lo más) n facetas y d dimensiones.
- La solución óptima (si existe) se alcanza siempre en algún vértice.
- El método del símplice [Dantzig 1947] resuelve el problema comenzando en un vértice cualquiera y moviéndose a través del grafo del poliedro, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con la complejidad del caso peor del método del símplice.

Conexión con la Conjetura de Hirsch

- El espacio factible $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Mx \leq b\}$ de un programa lineal con n ecuaciones en d variables es un poliedro P con (a lo más) n facetas y d dimensiones.
- La solución óptima (si existe) se alcanza siempre en algún vértice.
- El método del símplice [Dantzig 1947] resuelve el problema comenzando en un vértice cualquiera y moviéndose a través del grafo del poliedro, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con la complejidad del caso peor del método del símplice.

Conexión con la Conjetura de Hirsch

- El espacio factible $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Mx \leq b\}$ de un programa lineal con n ecuaciones en d variables es un poliedro P con (a lo más) n facetas y d dimensiones.
- La solución óptima (si existe) se alcanza siempre en algún vértice.
- El método del símplice [Dantzig 1947] resuelve el problema comenzando en un vértice cualquiera y moviéndose a través del grafo del poliedro, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con la complejidad del caso peor del método del símplice.

Conexión con la Conjetura de Hirsch

- El espacio factible $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Mx \leq b\}$ de un programa lineal con n ecuaciones en d variables es un poliedro P con (a lo más) n facetas y d dimensiones.
- La solución óptima (si existe) se alcanza siempre en algún vértice.
- El método del símplice [Dantzig 1947] resuelve el problema comenzando en un vértice cualquiera y moviéndose a través del grafo del poliedro, de manera monótona, hasta llegar al óptimo.
- En particular, la Conjetura de Hirsch está relacionada con la complejidad del caso peor del método del símplice.

Complejidad de la programación lineal

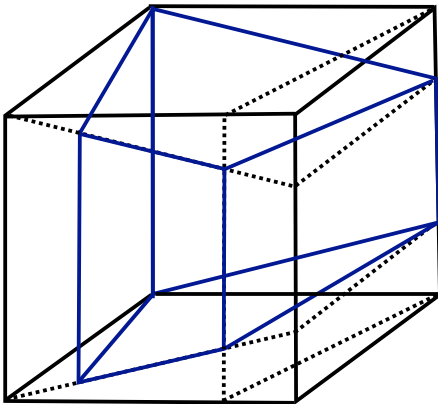
- Para casi todas las reglas de pivote diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del cubo de Klee-Minty, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:

Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:

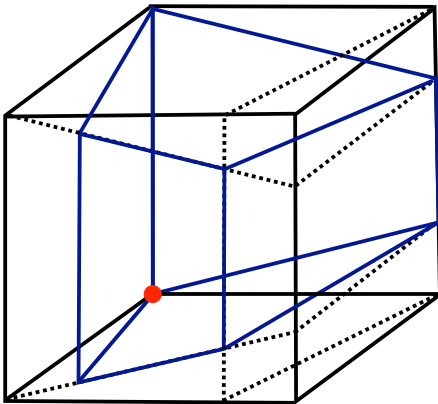
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



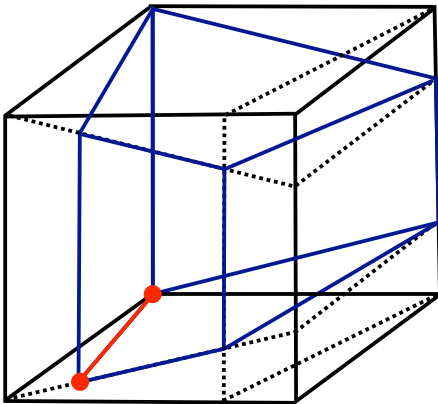
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



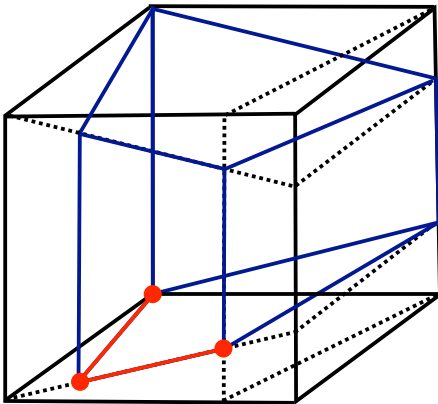
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



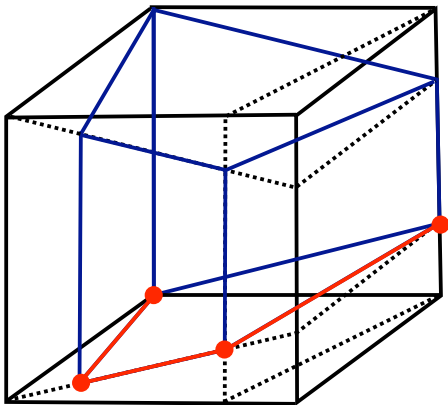
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



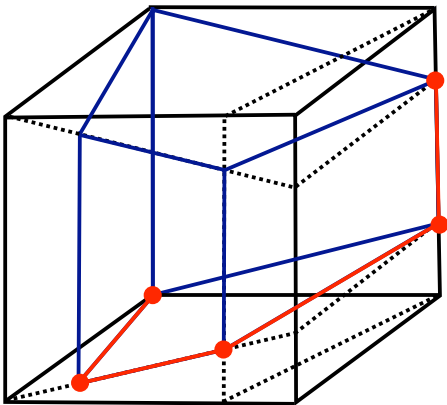
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



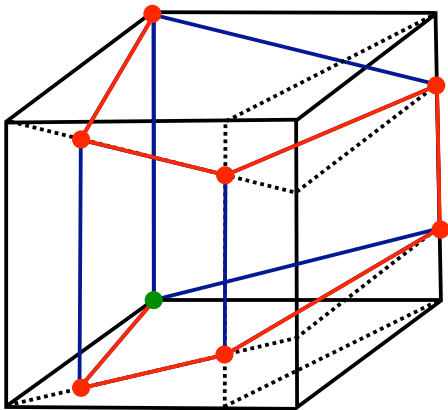
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



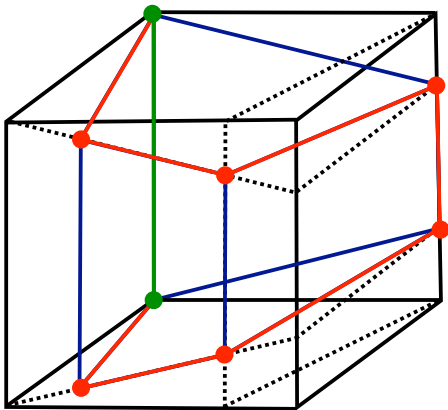
Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



Complejidad de la programación lineal

- Para casi todas las **reglas de pivote** diseñadas hasta la fecha se ha encontrado un análogo del **cubo de Klee-Minty**, que hace que el método necesite un número exponencial de pasos:



Complejidad de la programación lineal

Hay métodos de programación lineal más recientes que sí son polinómicos: (**elipsoide** [1979], **puntos interiores** [1984]). Pero:

Complejidad de la programación lineal

Hay métodos de programación lineal más recientes que sí son polinómicos: (**elipsoide** [1979], **puntos interiores** [1984]). Pero:

Complejidad de la programación lineal

Hay métodos de programación lineal más recientes que sí son polinómicos: (**elipsoide** [1979], **puntos interiores** [1984]). Pero:

The number of pivot steps [that the simplex method takes] to solve a problem with m equality constraints in n nonnegative variables is almost always at most a small multiple of m , say $3m$.

(M. Todd, 2011)

Complejidad de la programación lineal

Hay métodos de programación lineal más recientes que sí son polinómicos: (elipsoide [1979], puntos interiores [1984]). Pero:

The number of pivot steps [that the simplex method takes] to solve a problem with m equality constraints in n nonnegative variables is almost always at most a small multiple of m , say $3m$.

The simplex method has remained, if not the method of choice, a method of choice, usually competitive with, and on some classes of problems superior to, the more modern approaches.

(M. Todd, 2011)

Complejidad de la programación lineal

Además, los algoritmos polinómicos de programación lineal que se conocen no son *fuertemente polinómicos*: Son polinómicos en el **modelo bit** de complejidad (máquina de Turing) pero no en el **modelo aritmético** (máquina RAM real [Blum-Shub-Smale]).

Encontrar **algoritmos fuertemente polinómicos para programación lineal** es uno de los “**problemas matemáticos para el siglo 21**” de la lista de [Smale 2000]. Una regla de pivote polinómica para el método del símlice resolvería el problema afirmativamente.

Complejidad de la programación lineal

Además, los algoritmos polinómicos de programación lineal que se conocen no son *fuertemente polinómicos*: Son polinómicos en el **modelo bit** de complejidad (máquina de Turing) pero no en el **modelo aritmético** (máquina RAM real [Blum-Shub-Smale]).

Encontrar **algoritmos fuertemente polinómicos para programación lineal** es uno de los “**problemas matemáticos para el siglo 21**” de la lista de [Smale 2000]. Una regla de pivote polinómica para el método del símlice resolvería el problema afirmativamente.

Complejidad de la programación lineal

Además, los algoritmos polinómicos de programación lineal que se conocen no son *fuertemente polinómicos*: Son polinómicos en el **modelo bit** de complejidad (máquina de Turing) pero no en el **modelo aritmético** (máquina RAM real [Blum-Shub-Smale]).

Encontrar **algoritmos fuertemente polinómicos para programación lineal** es uno de los “**problemas matemáticos para el siglo 21**” de la lista de [Smale 2000]. Una regla de pivote polinómica para el método del símlice resolvería el problema afirmativamente.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los politopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **politopos en los que la cota es exacta** (productos de símlices).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los politopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **politopos en los que la cota es exacta** (productos de símlices).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los politopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **politopos en los que la cota es exacta** (productos de símlices).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los politopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **politopos en los que la cota es exacta** (productos de símlices).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los politopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **politopos en los que la cota es exacta** (productos de símlices).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los polítopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **polítopos en los que la cota es exacta** (productos de símplex).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

- Se satisface con igualdad en **símplices** ($n = d + 1$, $\delta = 1$) y **cubos** ($n = 2d$, $\delta = d$).
- La cumplen todos los politopos 0-1 [Naddef 1989] y los de dimensión 3 [Klee 1966].
- Si P y Q la cumplen, también su producto $P \times Q$: $\delta(P \times Q) = \delta(P) + \delta(Q)$. En particular:

Para todo $n \leq 2d$, hay **politopos en los que la cota es exacta** (productos de símlices).

- Para todo $n > d$, es fácil construir **poliedros no acotados** en los que la cota es exacta.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

... pero hay motivos más profundos.

Definición

Un d -politopo es **simple** si en cada vértice confluyen exactamente d facetas (es decir, las facetas están en “posición general”)

Se sabe desde los 60's que para probar (o refutar) la Conjetura de Hirsch basta con mirar al caso simple. En este caso, cada vez que recorremos una arista del grafo “salimos” de una única faceta y “entramos” en una única faceta (las otras $d - 1$ se mantienen).

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

... pero hay motivos más profundos.

Definición

Un d -politopo es **simple** si en cada vértice confluyen exactamente d facetas (es decir, las facetas están en “posición general”)

Se sabe desde los 60's que para probar (o refutar) la Conjetura de Hirsch basta con mirar al caso simple. En este caso, cada vez que recorremos una arista del grafo “salimos” de una única faceta y “entramos” en una única faceta (las otras $d - 1$ se mantienen).

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

... pero hay motivos más profundos.

Definición

Un d -politopo es **simple** si en cada vértice confluyen exactamente d facetas (es decir, las facetas están en “posición general”)

Se sabe desde los 60's que para probar (o refutar) la Conjetura de Hirsch basta con mirar al caso simple. En este caso, cada vez que recorremos una arista del grafo “salimos” de una única faceta y “entramos” en una única faceta (las otras $d - 1$ se mantienen).

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

... pero hay motivos más profundos.

Definición

Un d -politopo es **simple** si en cada vértice confluyen exactamente d facetas (es decir, las facetas están en “posición general”)

Se sabe desde los 60's que para probar (o refutar) la Conjetura de Hirsch basta con mirar al caso simple. En este caso, cada vez que recorremos una arista del grafo “salimos” de una única faceta y “entramos” en una única faceta (las otras $d - 1$ se mantienen).

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

... pero hay motivos más profundos.

Definición

Un d -politopo es **simple** si en cada vértice confluyen exactamente d facetas (es decir, las facetas están en “posición general”)

Se sabe desde los 60's que para probar (o refutar) la Conjetura de Hirsch basta con mirar al caso simple. En este caso, cada vez que recorremos una arista del grafo “salimos” de una única faceta y “entramos” en una única faceta (las otras $d - 1$ se mantienen).

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

Supongamos $n = 2d$, y que P es *simple*. Sean u y v dos **vértices complementarios** de P (i.e., sin faceta común):

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

Supongamos $n = 2d$, y que P es *simple*. Sean u y v dos **vértices complementarios** de P (i.e., sin faceta común):

Conjetura de los d pasos

Es posible ir de u a v de modo que en cada paso salimos de una faceta que contiene a u y entramos en una que contiene a v .

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

Supongamos $n = 2d$, y que P es *simple*. Sean u y v dos **vértices complementarios** de P (i.e., sin faceta común):

Conjetura de los d pasos

Es posible ir de u a v de modo que en cada paso salimos de una faceta que contiene a u y entramos en una que contiene a v .

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

Más generalmente, dados dos vértices u y v de un politopo simple P :

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

Más generalmente, dados dos vértices u y v de un politopo simple P :

Conjetura de la no revisitación

Es posible ir de u a v de modo que en cada paso entramos en una **faceta nueva**, una que no hemos visitado antes.

d pasos \Leftarrow no revisitación \Rightarrow Hirsch

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

La Conjetura de Hirsch se puede interpretar como:

Más generalmente, dados dos vértices u y v de un politopo simple P :

Conjetura de la no revisitación

Es posible ir de u a v de modo que en cada paso entramos en una **faceta nueva**, una que no hemos visitado antes.

d pasos \Leftarrow no revisitación \Rightarrow Hirsch

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Si $n < 2d$, entonces $H(n - 1, d - 1) \geq H(n, d)$:

Todo par de vértices está en una faceta común F , la cual es un politopo con una dimensión menos y (al menos) una faceta menos. Inducción en n y $n - d$.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Si $n < 2d$, entonces $H(n - 1, d - 1) \geq H(n, d)$:
 Todo par de vértices está en una faceta común F , la cual es un politopo con una dimensión menos y (al menos) una faceta menos. Inducción en n y $n - d$.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Si $n < 2d$, entonces $H(n - 1, d - 1) \geq H(n, d)$:
 Todo par de vértices está en una faceta común F , la cual es un politopo con una dimensión menos y (al menos) una faceta menos. *Inducción en n y $n - d$.*

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Si $n < 2d$, entonces $H(n - 1, d - 1) \geq H(n, d)$:
Todo par de vértices está en una faceta común F , la cual es un politopo con una dimensión menos y (al menos) una faceta menos. Inducción en n y $n - d$.

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Para todo n, d , $H(n, d) \leq H(n + 1, d + 1)$:
Sean u y v dos vértices de P . Sea P' la **cuña** de P sobre una faceta F arbitraria. Entonces, en P' hay vértices u', v' tales que

$$d_P(u, v) \leq d_{P'}(u', v').$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Para todo n, d , $H(n, d) \leq H(n + 1, d + 1)$:
Sean u y v dos vértices de P . Sea P' la **cuña** de P sobre una faceta F arbitraria. Entonces, en P' hay vértices u', v' tales que

$$d_P(u, v) \leq d_{P'}(u', v').$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Para todo n, d , $H(n, d) \leq H(n + 1, d + 1)$:
Sean u y v dos vértices de P . Sea P' la **cuña** de P sobre una faceta F arbitraria. Entonces, en P' hay vértices u', v' tales que

$$d_P(u, v) \leq d_{P'}(u', v').$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

- Para todo n, d , $H(n, d) \leq H(n + 1, d + 1)$:
Sean u y v dos vértices de P . Sea P' la **cuña** de P sobre una faceta F arbitraria. Entonces, en P' hay vértices u', v' tales que

$$d_P(u, v) \leq d_{P'}(u', v').$$

¿Por qué era $n - d$ una cota “razonable”?

Teorema de los d pasos [Klee-Walkup 1967]

Hirsch $\Leftrightarrow d$ pasos \Leftrightarrow no revisitación.

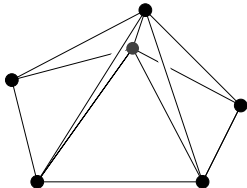
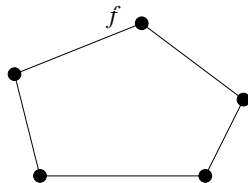
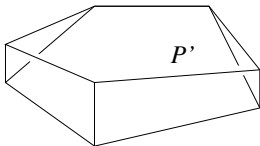
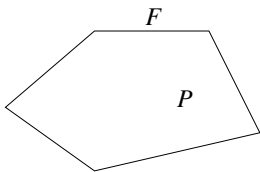
Dem: Sea $H(n, d) = \max\{\delta(P) : P \text{ es un } d\text{-politopo con } n \text{ facetas}\}$. Entonces, para todo $k = n - d$ fijo se tiene:

$$\dots \leq H(2k - 1, k - 1) \leq H(2k, k) = H(2k + 1, k + 1) = \dots$$

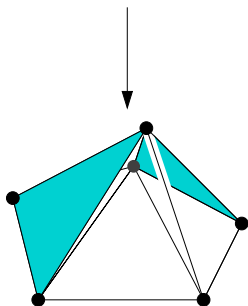
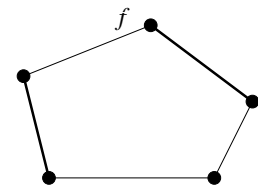
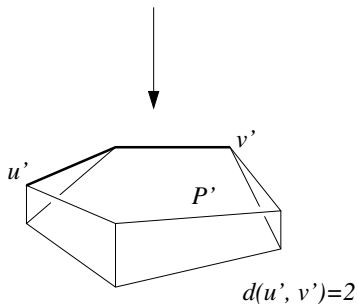
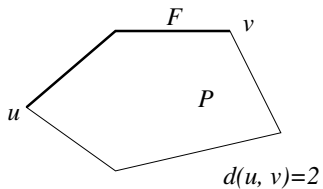
- Para todo n, d , $H(n, d) \leq H(n + 1, d + 1)$:
Sean u y v dos vértices de P . Sea P' la **cuña** de P sobre una faceta F arbitraria. Entonces, en P' hay vértices u', v' tales que

$$d_P(u, v) \leq d_{P'}(u', v').$$

Cuña, a.k.a. suspensión por un punto (ops)



Cuña, a.k.a. suspensión por un punto (ops)



Obsérvese que el Teorema de los d pasos se basa en:

Lema

Sea P un politopo de dimensión d , con $n > 2d$ facetas y diámetro λ . Entonces, hay otro politopo P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y diámetro λ .

Es decir: podemos incrementar la dimensión y número de facetas de un politopo en una unidad, **preservando su diámetro**, hasta que $n = 2d$.

Obsérvese que el Teorema de los d pasos se basa en:

Lema

Sea P un politopo de dimensión d , con $n > 2d$ facetas y diámetro λ . Entonces, hay otro politopo P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y diámetro λ .

Es decir: podemos incrementar la dimensión y número de facetas de un politopo en una unidad, **preservando su diámetro**, hasta que $n = 2d$.

Obsérvese que el Teorema de los d pasos se basa en:

Lema

Sea P un politopo de dimensión d , con $n > 2d$ facetas y diámetro λ . Entonces, hay otro politopo P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y diámetro λ .

Es decir: podemos incrementar la dimensión y número de facetas de un politopo en una unidad, **preservando su diámetro**, hasta que $n = 2d$.

Los contraejemplos

La construcción de contraejemplos tiene dos ingredientes:

- 1 Un Teorema fuerte de los d pasos para husos/prismatoides.
- 2 La construcción de prismatoides de dimensión 5 y “anchura” 6.

Los contraejemplos

La construcción de contraejemplos tiene dos ingredientes:

- 1 Un **Teorema fuerte de los d pasos** para husos/prismatoides.
- 2 La construcción de **prismatoides de dimensión 5 y “anchura” 6**.

Los contraejemplos

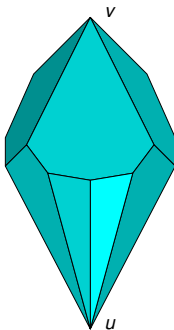
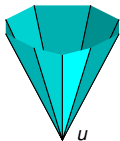
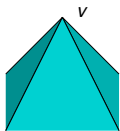
La construcción de contraejemplos tiene dos ingredientes:

- 1 Un **Teorema fuerte de los d pasos** para husos/prismatoides.
- 2 La construcción de **prismatoides de dimensión 5 y “anchura” 6**.

Husos

Definición

Un **huso** es un politopo P con dos vértices distinguidos u y v tales que toda faceta contiene a uno de los dos.



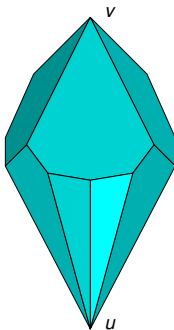
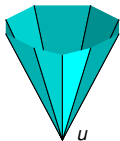
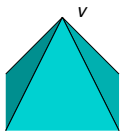
Definición

La **longitud** de un huso es la distancia (en el grafo) entre u y v .

Husos

Definición

Un **huso** es un politopo P con dos vértices distinguidos u y v tales que toda faceta contiene a uno de los dos.



Definición

La **longitud** de un huso es la distancia (en el grafo) entre u y v .

Husos

Teorema (Fuerte de los d pasos, versión husos, S. 2010)

Sea P un huso de dimensión d , con $n > 2d$ facetas, y longitud δ . Entonces, hay otro huso P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y longitud $\delta + 1$.

Es decir: podemos aumentar la dimensión, número de facetas *y longitud* de un huso, las tres en una unidad, hasta que $n = 2d$.

Corolario

En particular, si un huso tiene longitud $> d$ entonces hay otro huso P' (de dimensión $n - d$, con $2n - 2d$ facetas, y longitud $\geq \delta + n - 2d > n - d$) que viola la Conjetura de Hirsch.

Husos

Teorema (Fuerte de los d pasos, versión husos, S. 2010)

Sea P un huso de dimensión d , con $n > 2d$ facetas, y longitud δ . Entonces, hay otro huso P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y longitud $\delta + 1$.

Es decir: podemos aumentar la dimensión, número de facetas *y longitud* de un huso, las tres en una unidad, hasta que $n = 2d$.

Corolario

En particular, si un huso tiene longitud $> d$ entonces hay otro huso P' (de dimensión $n - d$, con $2n - 2d$ facetas, y longitud $\geq \delta + n - 2d > n - d$) que viola la Conjetura de Hirsch.

Husos

Teorema (Fuerte de los d pasos, versión husos, S. 2010)

Sea P un huso de dimensión d , con $n > 2d$ facetas, y longitud δ . Entonces, hay otro huso P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y longitud $\delta + 1$.

Es decir: podemos aumentar la dimensión, número de facetas *y longitud* de un huso, las tres en una unidad, hasta que $n = 2d$.

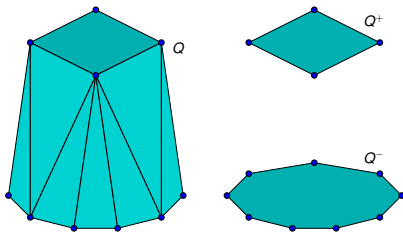
Corolario

En particular, si un huso tiene longitud $> d$ entonces hay otro huso P' (de dimensión $n - d$, con $2n - 2d$ facetas, y longitud $\geq \delta + n - 2d > n - d$) que viola la Conjetura de Hirsch.

Prismatoides

Definición

Un **prismatoide** es un politopo Q con dos facetas Q^+ and Q^- que contienen a todos los vértices.



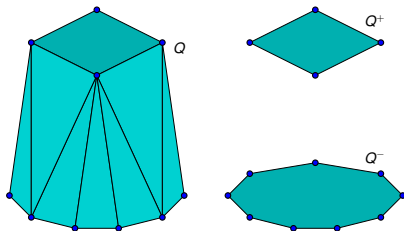
Definición

La **anchura** de un prismatoide es la distancia (en el grafo dual) entre Q^+ y Q^- .

Prismatoides

Definición

Un **prismatoide** es un politopo Q con dos facetas Q^+ and Q^- que contienen a todos los vértices.



Definición

La **anchura** de un prismatoide es la distancia (en el grafo dual) entre Q^+ y Q^- .

Prismatoides

Teorema (Fuerte de los d pasos, versión prismatoides, S. 2010)

Sea Q un prismaoide de dimensión d , con $n > 2d$ vértices, y con anchura δ . Entonces, existe otro prismaoide Q' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ vértices y con anchura $\delta + 1$.

Es decir: podemos aumentar la dimensión, número de vértices *y anchura* de un prismaoide, las tres en una unidad, hasta que $n = 2d$.

Prismatoides

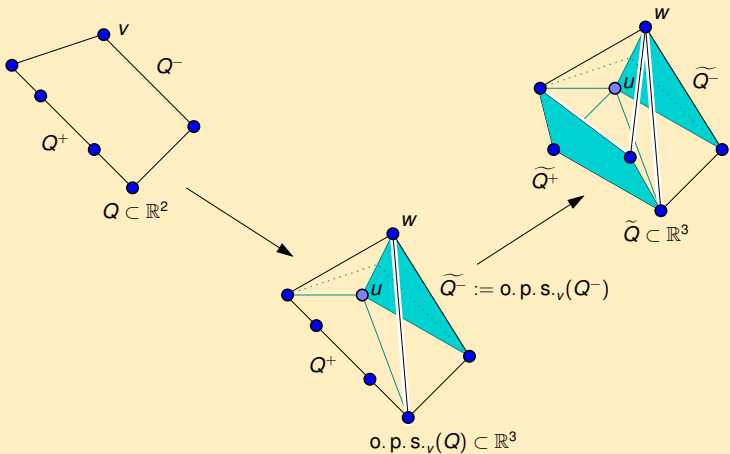
Teorema (Fuerte de los d pasos, versión prismatoides, S. 2010)

Sea Q un prismaoide de dimensión d , con $n > 2d$ vértices, y con anchura δ . Entonces, existe otro prismaoide Q' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ vértices y con anchura $\delta + 1$.

Es decir: podemos aumentar la dimensión, número de vértices *y anchura* de un prismaoide, las tres en una unidad, hasta que $n = 2d$.

El Teorema fuerte de los d pasos

Demostración



El Teorema fuerte de los d pasos

Corolario

En particular, si un prismoide Q tiene anchura $> d$ entonces hay un politopo P' (de dimensión $n - d$, con $2n - 2d$ facetas, y longitud $\geq \delta + n - 2d > n - d$) que viola la Conjetura de Hirsch.

La principal ventaja de este resultado es que relaciona la anchura directamente con la dimensión. El número de vértices o facetas no aparece.

El Teorema fuerte de los d pasos

Corolario

En particular, si un prismoide Q tiene anchura $> d$ entonces hay un politopo P' (de dimensión $n - d$, con $2n - 2d$ facetas, y longitud $\geq \delta + n - 2d > n - d$) que viola la Conjetura de Hirsch.

La principal ventaja de este resultado es que relaciona la anchura directamente con la dimensión. El número de vértices o facetas no aparece.

Un 5-pismatoide de anchura seis

Sea Q el politopo cuyos vértices son las 48 filas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \pm 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 18 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 45 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 45 & 1 \\ \pm 15 & \pm 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 30 & \pm 30 & 1 \\ 0 & \pm 10 & \pm 40 & 0 & 1 \\ \pm 10 & 0 & 0 & \pm 40 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 18 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 18 & 0 & -1 \\ \pm 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 45 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 15 & \pm 15 & -1 \\ \pm 30 & \pm 30 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 40 & 0 & \pm 10 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 40 & 0 & \pm 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Un 5-pismatoide de anchura seis

Sea Q el politopo cuyos vértices son las 48 filas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \pm 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 18 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 45 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 45 & 1 \\ \pm 15 & \pm 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 30 & \pm 30 & 1 \\ 0 & \pm 10 & \pm 40 & 0 & 1 \\ \pm 10 & 0 & 0 & \pm 40 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 18 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 18 & 0 & -1 \\ \pm 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 45 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 15 & \pm 15 & -1 \\ \pm 30 & \pm 30 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 40 & 0 & \pm 10 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 40 & 0 & \pm 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Un 5-pismatoide de anchura seis

Sea Q el politopo cuyos vértices son las 48 filas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \pm 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 18 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 45 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 45 & 1 \\ \pm 15 & \pm 15 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pm 30 & \pm 30 & 1 \\ 0 & \pm 10 & \pm 40 & 0 & 1 \\ \pm 10 & 0 & 0 & \pm 40 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 18 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 18 & 0 & -1 \\ \pm 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 45 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \pm 15 & \pm 15 & -1 \\ \pm 30 & \pm 30 & 0 & 0 & -1 \\ \pm 40 & 0 & \pm 10 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 40 & 0 & \pm 10 & -1 \end{pmatrix}$$

Un 5-pismatoide de anchura seis

Teorema (S. 2010)

El prismatoide Q de la transparencia anterior tiene anchura seis.

Un 5-pismatoide de anchura seis

Teorema (S. 2010)

El prismatoide Q de la transparencia anterior tiene anchura seis.

Corolario

Hay un politopo de dimensión 43 con 86 facetas y diámetro (al menos) 44.

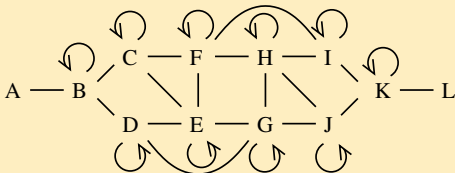
Un 5-pismatoide de anchura seis

Teorema (S. 2010)

El prismatoide Q de la transparencia anterior tiene anchura seis.

Demostración 1 del Teorema

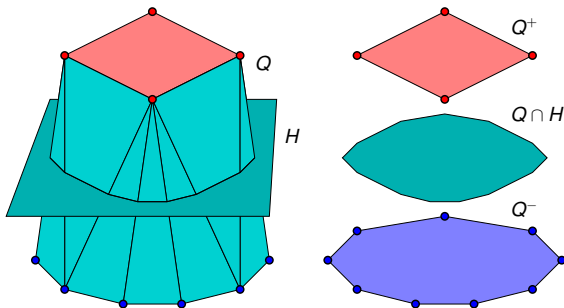
Se ha verificado con software para el análisis de polítopos (`polymake`, `lrs`, `cdd`) que el grafo dual de Q tiene la siguiente estructura, módulo simetrías:



Combinatoria de prismatoides

Demostración 2 del Teorema (idea).

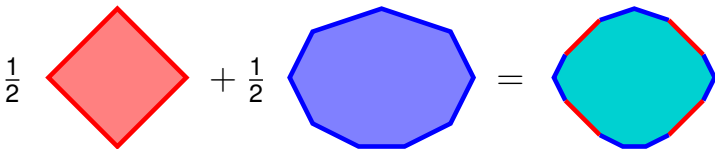
Para analizar la combinatoria de un d -prismatoide Q basta con estudiar su intersección con un hiperplano intermedio ...



Combinatoria de prismatoides

Demostración 2 del Teorema (idea).

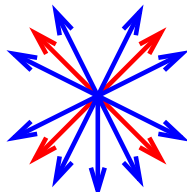
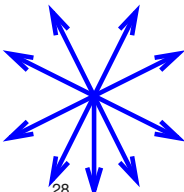
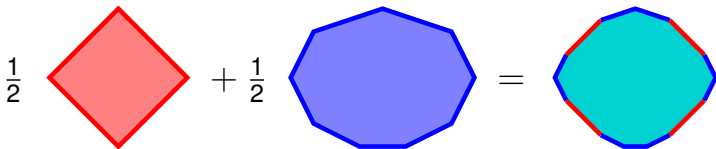
... la cual es la suma de Minkowski $Q^+ + Q^-$ de las dos bases Q^+ y Q^- .



Combinatoria de prismatoides

Demostración 2 del Teorema (idea).

... la cual es la suma de Minkowski $Q^+ + Q^-$ de las dos bases Q^+ y Q^- . El abanico normal de $Q^+ + Q^-$ es la “superposición” de los de Q^+ y Q^- .



Combinatoria de prismatoides

Así que: la combinatoria de Q se deduce de la superposición de los abanicos normales de Q^+ y Q^- .

Nota

El abanico normal de un $(d - 1)$ -politopo se puede pensar como una descomposición celular (geodésica, poliédrica; un “mapa”) en la $(d - 2)$ -esfera.

Conclusión

4-prismatoides \Leftrightarrow pares de mapas en la 2-esfera.

5-prismatoides \Leftrightarrow pares de mapas en la 3-esfera.

Combinatoria de prismatoides

Así que: la combinatoria de Q se deduce de la superposición de los abanicos normales de Q^+ y Q^- .

Nota

Combinatoria de prismatoides

Así que: la combinatoria de Q se deduce de la superposición de los abanicos normales de Q^+ y Q^- .

Nota

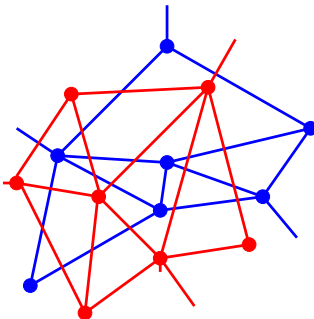
El abanico normal de un $(d - 1)$ -politopo se puede pensar como una descomposición celular (geodésica, poliédrica; un “mapa”) en la $(d - 2)$ -esfera.

Conclusión

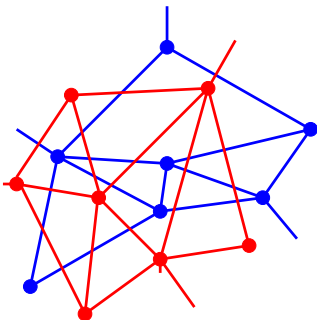
4-prismatoides \Leftrightarrow pares de mapas en la 2-esfera.

5-prismatoides \Leftrightarrow pares de mapas en la 3-esfera.

Ejemplo: (parte de) un 4-prismatoide



Ejemplo: (parte de) un 4-prismatoide

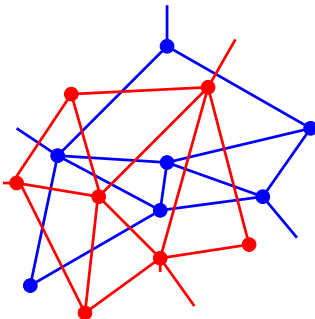


4-prismatoide de anchura > 4



par de mapas (geodésicos, poliédricos) en S^2 tales que dos pasos no bastan para ir de un vértice azul a uno rojo.

Ejemplo: (parte de) un 4-prismatoide



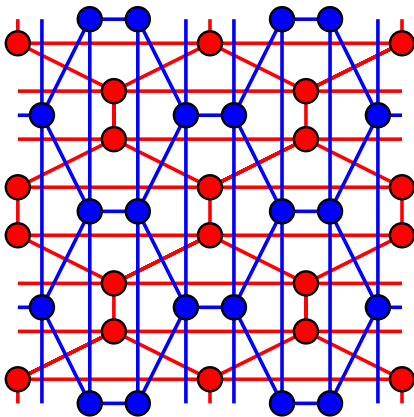
5-prismatoide de anchura > 5



par de mapas (geodésicos, poliédricos) en S^3 tales que tres pasos no bastan para ir de un vértice azul a uno rojo.

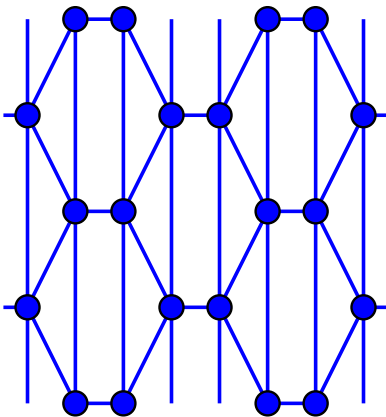
A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”:



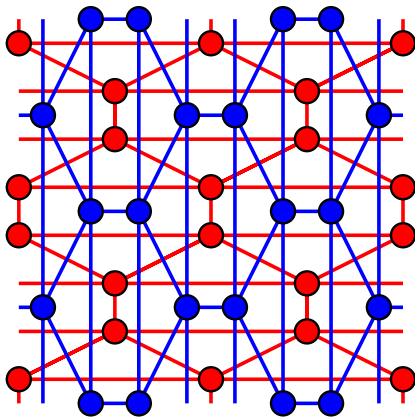
A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”:



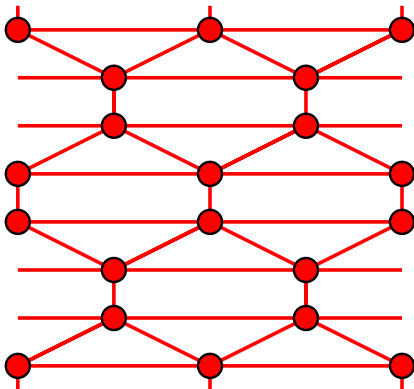
A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”:



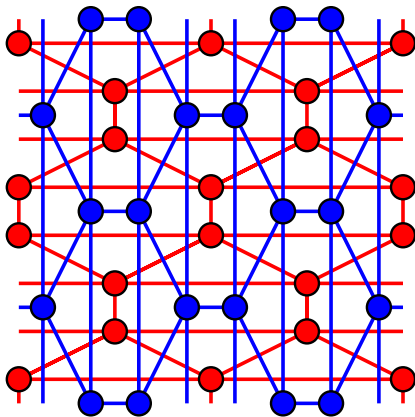
A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”:



A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”:



A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”.

A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”.

Si este dibujo estuviera en la esfera, representaría en 4-prismatoide de anchura 5.

A 4-prismatoide de anchura > 4 ?

Replicando la siguiente estructura básica obtenemos un mapa periódico en el plano que es “no Hirsch”.

Si este dibujo estuviera en la esfera, representaría en 4-prismatoide de anchura 5.

Eso no funciona, pero metiendo el dibujo en (dos toros inmersos en) S^3 sí que funciona, y da un prismatoide con 48 vértices.

Contraejemplos más pequeños

Hay dos maneras de obtener contraejemplos más pequeños:

- Encontrar 5-prismatoides de anchura > 5 más pequeños,
○
- Encontrar un 4-prismatoide de anchura > 4 .

Esto último es imposible:

Teorema (S.-Stephen-Thomas 2011)

Todo prismoide de dimensión 4 tiene anchura ≤ 4 .

Contraejemplos más pequeños

Hay dos maneras de obtener contraejemplos más pequeños:

- Encontrar 5-prismatoides de anchura > 5 más pequeños,
0
- Encontrar un 4-prismatoide de anchura > 4 .

Esto último es imposible:

Teorema (S.-Stephen-Thomas 2011)

Todo prismoide de dimensión 4 tiene anchura ≤ 4 .

Contraejemplos más pequeños

Hay dos maneras de obtener contraejemplos más pequeños:

- Encontrar 5-prismatoides de anchura > 5 más pequeños,
o
- Encontrar un 4-prismatoide de anchura > 4 .

Esto último es imposible:

Teorema (S.-Stephen-Thomas 2011)

Todo prismoide de dimensión 4 tiene anchura ≤ 4 .

Contraejemplos más pequeños

Hay dos maneras de obtener contraejemplos más pequeños:

- Encontrar 5-prismatoides de anchura > 5 más pequeños,
o
- Encontrar un 4-prismatoide de anchura > 4 .

Esto último es imposible:

Teorema (S.-Stephen-Thomas 2011)

Todo prismoide de dimensión 4 tiene anchura ≤ 4 .

Contraejemplos más pequeños

En cambio

Teorema (Matschke-S-Weibel, 2011+)

Hay un prismatoide de dimensión 5 con 25 vértices y anchura 6.

Corolario

Hay un 20-politopo con 40 facetas que viola la Conjetura de Hirsch.

Este politopo se ha calculado de forma explícita. Tiene 36 442 vértices, y diámetro 21.

Contraejemplos más pequeños

En cambio

Teorema (Matschke-S-Weibel, 2011+)

Hay un prismatoide de dimensión 5 con 25 vértices y anchura 6.

Corolario

Hay un 20-politopo con 40 facetas que viola la Conjetura de Hirsch.

Este politopo se ha calculado de forma explícita. Tiene 36 442 vértices, y diámetro 21.

Contraejemplos más pequeños

En cambio

Teorema (Matschke-S-Weibel, 2011+)

Hay un prismaoide de dimensión 5 con 25 vértices y anchura 6.

Corolario

Hay un 20-politopo con 40 facetas que viola la Conjetura de Hirsch.

Este politopo se ha calculado de forma explícita. Tiene 36 442 vértices, y diámetro 21.

Contraejemplos más pequeños

En cambio

Teorema (Matschke-S-Weibel, 2011+)

Hay un prismaoide de dimensión 5 con 25 vértices y anchura 6.

Corolario

Hay un 20-politopo con 40 facetas que viola la Conjetura de Hirsch.

Este politopo se ha calculado de forma explícita. Tiene 36 442 vértices, y diámetro 21.

Anchura asintótica en dimensión cinco

Teorema (Matschke-S.-Weibel 2011+)

Hay 5-prismatoides con n vértices y anchura $\Omega(\sqrt{n})$.

Idea de la demostración

Comenzar con el siguiente par de mapas en el toro.

Anchura asintótica en dimensión cinco

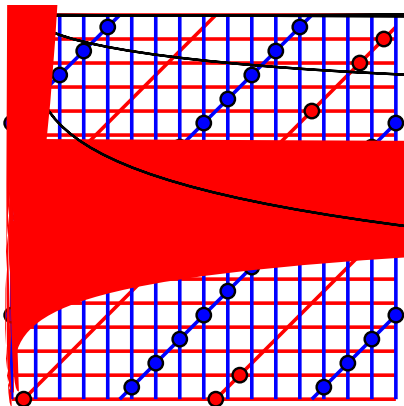
Teorema (Matschke-S.-Weibel 2011+)

Hay 5-prismatoides con n vértices y anchura $\Omega(\sqrt{n})$.

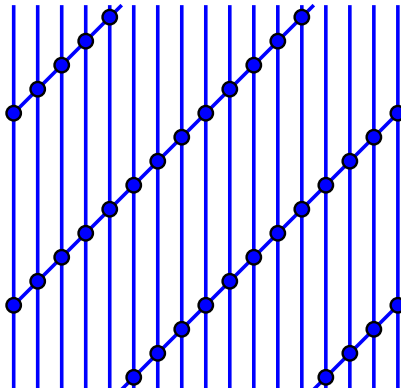
Idea de la demostración

Comenzar con el siguiente par de mapas en el toro.

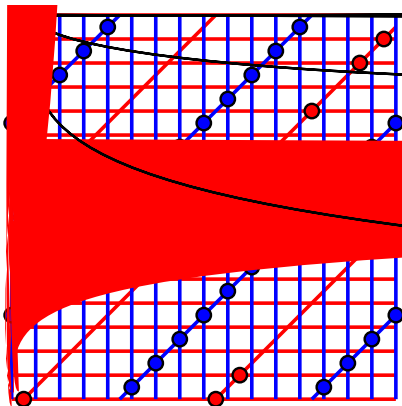
Anchura asintótica en dimensión cinco



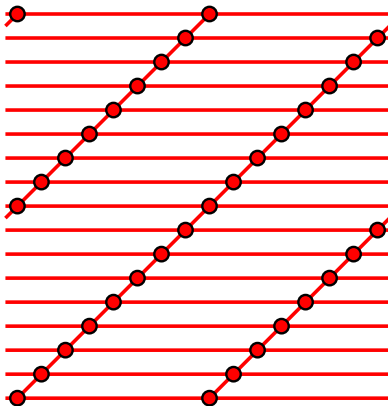
Anchura asintótica en dimensión cinco



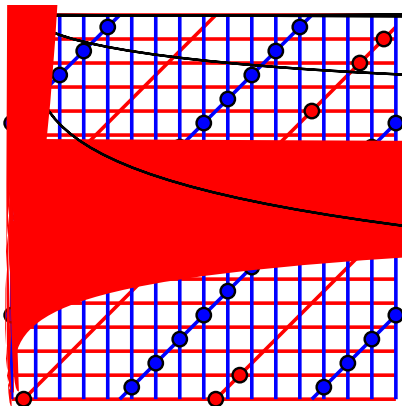
Anchura asintótica en dimensión cinco



Anchura asintótica en dimensión cinco

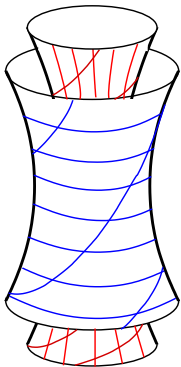


Anchura asintótica en dimensión cinco



Anchura asintótica en dimensión cinco

Dibujar los mapas rojo y azul en dos toros paralelos en la 3-esfera.

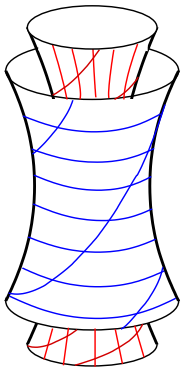


Completar los mapas de los toros a la 3-esfera (hace falta un número cuadrático de celdas para ello).

Entre toro y toro se obtiene esencialmente la superposición de los mapas iniciales del toro plano.

Anchura asintótica en dimensión cinco

Dibujar los mapas rojo y azul en dos toros paralelos en la 3-esfera.

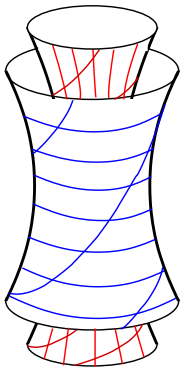


Completar los mapas de los toros a la 3-esfera (hace falta un número cuadrático de celdas para ello).

Entre toro y toro se obtiene esencialmente la superposición de los mapas iniciales del toro plano.

Anchura asintótica en dimensión cinco

Dibujar los mapas rojo y azul en dos toros paralelos en la 3-esfera.



Completar los mapas de los toros a la 3-esfera (hace falta un número cuadrático de celdas para ello).

Entre toro y toro se obtiene esencialmente la superposición de los mapas iniciales del toro plano.

Anchura asintótica en dimensión fija

Si fijamos la dimensión d , la anchura de los prismatoides es lineal:

Teorema

Un d -prismatoide con n vértices no puede tener anchura mayor que $2^{d-3}n$.

Demostración

Se sigue del resultado general para diámetros de polítopos [Barnette, Larman, ~1970].

Anchura asintótica en dimensión fija

Si fijamos la dimensión d , la anchura de los prismatoides es lineal:

Teorema

Un d -prismatoide con n vértices no puede tener anchura mayor que $2^{d-3}n$.

Demostración

Se sigue del resultado general para diámetros de politopos [Barnette, Larman, ~1970].

Anchura asintótica en dimensión fija

Si fijamos la dimensión d , la anchura de los prismatoides es lineal:

Teorema

Un d -prismatoide con n vértices no puede tener anchura mayor que $2^{d-3}n$.

Demostración

Se sigue del resultado general para diámetros de polítopos [Barnette, Larman, ~1970].

Anchura asintótica en dimensión cinco

En dimensión cinco podemos apurar un poco más:

Teorema

Un 5-prismatoide no puede tener anchura mayor que $n/2 + 3$.

Corolario

Usando el Teorema fuerte de los d pasos a partir de un 5-prismatoide es imposible violar la Conjetura de Hirsch por más de un 50%.

Anchura asintótica en dimensión cinco

En dimensión cinco podemos apurar un poco más:

Teorema

Un 5-prismatoide no puede tener anchura mayor que $n/2 + 3$.

Corolario

Usando el Teorema fuerte de los d pasos a partir de un 5-prismatoide es imposible violar la Conjetura de Hirsch por más de un 50%.

Anchura asintótica en dimensión cinco

En dimensión cinco podemos apurar un poco más:

Teorema

Un 5-prismatoide no puede tener anchura mayor que $n/2 + 3$.

Corolario

Usando el Teorema fuerte de los d pasos a partir de un 5-prismatoide es imposible violar la Conjetura de Hirsch por más de un 50%.

Conclusión

- Mediante productos y pegados, los contraejemplos se convierten en una familia infinita que viola la conjetura por un 5%.
- Esto rompe una cierta barrera psicológica, pero para las aplicaciones resulta absolutamente irrelevante.

Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.

(V. Klee and P. Kleinschmidt, 1987)

Conclusión

- Mediante productos y pegados, los contraejemplos se convierten en una familia infinita que viola la conjetura por un 5%.
- Esto rompe una cierta barrera psicológica, pero para las aplicaciones resulta absolutamente irrelevante.

Finding a counterexample will be merely a small first step in the line of investigation related to the conjecture.

(V. Klee and P. Kleinschmidt, 1987)

Conclusión

- Mediante productos y pegados, los contraejemplos se convierten en una familia infinita que viola la conjetura por un 5%.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Conclusión

Una propuesta para el “siguiente paso”:

Conjecture (Hähnle, 2010)

El diámetro de un d -politopo con n -facetas no puede exceder de

$$d(n - d).$$

De hecho, esta conjetura se postula en un marco mucho más general (*familias conexas con capas*, en el sentido de Eisenbrand-Hähnle-Razborov-Rothvoss) lo cual incluiría, por ejemplo, a todas las variedades simpliciales,

Por otro lado, encontrar politopos cuyo diámetro supere, digamos, $2n$, sería un avance significativo.

Fin

GRACIAS!