ECUACION DE SCHRÖDINGER EN EL CASO PERIODICO.

Si consideramos la ecuación de Schrödinger para el caso periódico

$$\begin{cases} 2\pi i \partial_t u = {\partial_x}^2 u, \\ u(x,0) = u_0(x) = \displaystyle\sum_k a_k e^{2\pi i k x}, \end{cases}$$

la solución viene definida por $u(x,t) = e^{it\partial_x^2} u_0 = \displaystyle\sum_k a_k e^{2\pi i (k^2 t + kx)}$.

Obtenemos unas estimaciones de tipo Strichartz, comenzando con un resultado bilineal

Teorema 1. Sean $f(x) = \displaystyle\sum_j a_j e^{2\pi i j x}$ y $g(x) = \displaystyle\sum_k b_k e^{2\pi i k x}$ funciones y supongamos que $d\,(\mathrm{supp}\,\hat{\mathrm{f}}, \mathrm{supp}\,\hat{\mathrm{g}}) = \mathrm{m}_0$. Sea $I = [0, \delta]$ intervalo, entonces tenemos

$$\left\| e^{it\partial_x^2} f \, \overline{e^{it\partial_x^2} g} \right\|_{L^2_I L^2_{[0,1]}} \leq (\Delta(m_0, \delta))^{1/2} \, \|f\|_{L^2} \, \|g\|_{L^2}.$$

donde $\Delta(m_0, \delta) = \delta$ si $m_0 \geq \delta^{-1}$; $1/m_0$ si $\delta^{-1/2} < m_0 < \delta^{-1}$; $\delta^{1/2}$ si $m_0 \leq \delta^{-1/2}$ y como consecuencia demostramos el siguiente teorema:

Teorema 2. Si $I = [0, \delta]$, entonces se verifica

$$\left(\int_I \int_0^1 |u(x,t)|^4 \, dx \, dt \right)^{1/4} \leq |I|^{1/8} \|u_0\|_2.$$

Si se considera la correspondiente función maximal $\sup_t |u(x,t)|$, obtenemos el siguiente resultado:

Lema .- Sea $u_0(x) = \displaystyle\sum_{|j| \leq N} a_j e^{2\pi i j x}$ e $I = [0, \delta]$ intervalo , entonces tenemos la siguiente estimación para la función maximal:

$$\left(\int_0^1 \sup_{t \in [0,\delta]} |u(x,t)|^4 \, dx \right)^{1/4} \leq \delta^{1/4} N^{1/2} N^{\epsilon} \|u_0\|_2.$$

Utilizando estos resultados se prueba que la ecuación nolineal de Schrödinger está globalmente bien propuesta en el espacio $L^4([0,1] \times [0,1])$ para datos en L^2.