

UNA PANORAMICA SOBRE LA SINGULARIDAD HOPF-CERO

SANTIAGO IBAÑEZ

(Depto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo)

Se denomina singularidad Hopf-Cero a todo punto de equilibrio de un campo de vectores tridimensional donde el sistema linealizado presenta una pareja de autovalores imaginarios puros y un autovalor cero. La clasificación topológica de estas singularidades al nivel de la codimensión dos fué obtenida por Takens en 1974. Desde entonces la resolución de los correspondientes problemas de bifurcación local ha sido, y todavía es, objeto de un gran número de esfuerzos. En esta charla se discutirán los avances obtenidos, los problemas abiertos y las perspectivas futuras. Sólo nos ocuparemos de uno de los tipos topológicos de los seis que se presentan con codimensión dos. Se trata de aquél que, como se explicará, es susceptible de ser germen de comportamientos caóticos.

El recorrido por la literatura comenzará con los resultados de Guckenheimer y Holmes sobre el diagrama de bifurcación en familias invariantes por rotaciones (cualquier despliegue de una singularidad Hopf-Cero admite una forma normal que a cualquier orden es invariante por rotaciones). Se discutirán después los resultados de Broer y Vegter y de Gaspard sobre la existencia de conexiones homoclínicas de tipo Shilnikov (y por lo tanto de dinámica caótica) en los despliegues de la singularidad. Por último, como recientes desarrollos de las anteriores perspectivas, se comentarán los trabajos de Lamb, Teixeira Webster y de Champneys y Kirk.

El principal problema abierto que se discutirá es el de la obtención de condiciones analíticas que permitan responder (afirmativa o negativamente) a la pregunta de si un despliegue dado incluye conexiones homoclínicas de tipo Shilnikov. Para abordar esta cuestión uno ha de enfrentarse con problemas de escisiones exponencialmente pequeñas de separatrices donde los avances más significativos se deben a resultados recientes de Baldoma y M-Seara. En este mismo contexto, la singularidad Hopf-Cero considerada se conectará con el estudio del despliegue de la singularidad nilpotente tridimensional de codimensión tres y con el denominado sistema de Michelson. Como veremos se trata este último de un despliegue muy específico de la singularidad Hopf-Cero que ha sido ampliamente estudiado en la literatura. De nuevo haremos una breve presentación de los resultados obtenidos para esta familia.

Para concluir se esbozarán los enfoques que pretendemos desarrollar en el trabajo que actualmente estamos elaborando.