Splines abstractos en espacios de Krein

Francisco Martínez Pería

Instituto Argentino de Matemática, Buenos Aires, Argentina
Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra, Catalunya
francisco@mate.unlp.edu.ar

Desde que I. J. Schoenberg [1] introdujo los splines como solución a diversos problemas de interpolación, éstos han sido utilizados en distintas áreas de la matemática, como la teoría de aproximaciones, la estadística, el análisis numérico y la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Además, se han convertido en una importante herramienta en el procesamiento de imágenes y señales, la teoría del aprendizaje computacional y otras aplicaciones.

En la decada del '60, M. Atteia [2] introdujo una versión abstracta del problema de interpolación, formulada en espacios de Hilbert. La misma fue posteriormente desarrollada por P. J. Laurent [3], A. Sard [4], C. de Boor [5] y otros.

Recientemente, S. Canu et al. [6] introdujeron en la teoría del aprendizaje ciertos métodos que involucran núcleos (reproductivos) indefinidos. El mismo puede describirse como un problema de interpolación entre espacios de Krein con núcleo reproductivo, es decir, espacios con núcleo reproductivo donde el núcleo es simétrico, pero que no cumple necesariamente la condición de Mercer.

En esta charla, motivados principalmente por el enfoque de Atteia, presentaremos generalizaciones de los problemas abstractos de interpolación y smoothing a espacios de Krein. Más precisamente, si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son dos espacios de Krein y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, dados dos operadores suryectivos $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in L(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ nos proponemos describir los siguentes problemas:

- **Interpolación.** Fijado $z_0 \in \mathcal{E}$, encontrar $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que
$$[Tx_0, Tx_0]_{\mathcal{K}} = \text{mín}\{[Tx, Tx]_{\mathcal{K}} : V(x) = z_0\},$$
- **Smoothing.** Dado $\rho > 0$ y fijado $z_0 \in \mathcal{E}$, encontrar $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que
$$[Tx_0, Tx_0]_{\mathcal{K}} + \rho\|Vx_0 - z_0\|^2_{\mathcal{E}} = \min_{x\in\mathcal{H}}([Tx, Tx]_{\mathcal{K}} + \rho\|Vx - z_0\|^2_{\mathcal{E}}),$$

y llamaremos *splines abstractos indefinidos* a las soluciones de los mismos. Mostraremos además que esta definición puede interpretarse como una generalización a la propuesta en [6] para espacios de Krein con núcleo reproductivo.

Referencias

[1] I. J. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Parts A, B, Quart. J. Maths. 4 (1946), 45–99, 112–141.

[2] M. Atteia, Géneralization de la définition et des propietés des "splines fonctions", C.R. Sc. Paris 260 (1965), 3550-3553.

[3] P. J. Laurent, Approximation et optimisation, Hermann, Paris, 1972.

[4] A. Sard, Optimal approximation, J. Functional Analysis 1 (1967), 222–244; addendum 2(1968), 368-369.

[5] C. de Boor, Convergence of abstract splines, J. Approx. Theory 31 (1981), 80–89.

[6] S. Canu, C. S. Ong, X. Mary, Splines with non positive kernels, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, (2005), 1–10.